Μαθημα 12º 1/4/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

Εστω επιπεδο (π): $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$. Αν $P(x,y,z)$ σημειο του επιπεδου τοτε η αποσταση σημειου απο ευθεια είναι:

$$d(P,\pi)=\frac{|Ax+By+\Gamma z+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

Παραδειγμα

Να βρεθει η αποσταση $P_1(1,2,3)$ απο το επιπεδο (π) το οποιο διερχεται απο το $P_0(3,4,5)$ και ειναι καθετο προς το διανυσμα $(-1,-1,2)$

$$\left.\begin{array}{l}(3,4,5)\in(\pi)\\(-1,-1,2)\perp(\pi)\end{array}\right\}\Rightarrow(-1)(x-3)+(-1)(y-4)+(-2)(z-5)=0\Rightarrow$$

$$-x+3-y+4-2z+10=0\Rightarrow x+y+2z-17=0 \text{ με } A=1,\ B=1,\ \Gamma=2$$

Οποτε $d(P_0,\pi)=\dfrac{|1\cdot1+1\cdot2+2\cdot3-17|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{6}}$

(*) Αποσταση δυο επιπεδων {εχει εννοια οταν τα επιπεδα ειναι παραλληλα}

Εστω τα επιπεδα $(\pi_1): 2x-y+3z-4=0$

$(\pi_2): 6x-3y+9z+6=0$

Αρχικα παρατηρουμε οτι $\vec{n}_1=(2,-1,3)\perp(\pi_1)$ και $\vec{n}_2=(6,-3,9)\perp(\pi_2)$ οποτε βλεπουμε οτι $\vec{n}_2=3\vec{n}_1$ δηλ. γραμμικα εξαρτημενα αρα είναι συγγραμικα (παραλληλα)

Αρκει να προσδιορισουμε τυχαιο σημειο ενος εκ των δυο επιπεδων και στη συνεχεια να υπολογισουμε την αποσταση αυτου απο το αλλο επιπεδο.

(*) Δυο καθετα διανυσματα στο επιπεδο ειναι Γ.Ε δηλ. παραλληλα

Εστω $P_1(1,1,1) \in (\pi_1) \Rightarrow d(\pi_1,\pi_2) = d(P_1,\pi_2) = \dfrac{|6\cdot 1+(-3)\cdot 1+9\cdot 1+6|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+9^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{126}}$

Σχετικες θεσεις επιπεδων $\begin{cases} \text{α) παραλληλα} \\ \text{β) συμπιπτουν [ειναι ιδια]} \\ \text{γ) τεμνονται} \end{cases}$

Εστω (π_1): $A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 \cdot z + \Delta_1 = 0$ με $A_i, B_i, \Gamma_i \neq 0$, $i=1,2$
(π_2): $A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 \cdot z + \Delta_2 = 0$

Εστω $\vec{n_1} = (A_1, B_1, \Gamma_1) \perp (\pi_1)$ και $\vec{n_2} = (A_2, B_2, \Gamma_2) \perp (\pi_2)$

α) $(\pi_1) // (\pi_2) \iff$ τα $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ συγγραμικα (παραλληλα) $\iff$
$\exists\, \kappa \neq 0 \in \mathbb{R}$ ωστε $\vec{n_2} = \kappa \cdot \vec{n_1} \iff (A_2, B_2, \Gamma_2) = \kappa \cdot (A_1, B_1, \Gamma_1) \iff$
$(A_2, B_2, \Gamma_2) = (\kappa \cdot A_1, \kappa \cdot B_1, \kappa \cdot \Gamma_1) \iff \begin{cases} A_2 = \kappa \cdot A_1 \\ B_2 = \kappa \cdot B_1 \\ \Gamma_2 = \kappa \cdot \Gamma_1 \end{cases} \iff$

$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \; (=\kappa)$ → Ικανη και αναγκαια συνθηκη παραλληλιας δυο επιπεδων

! Παρατηρησεις

(1) Αν A_2 ή B_2 ή $\Gamma_2 = 0 \Rightarrow$ υποχρεωτικα τα αντιστοιχα $A_1 = 0$ ή $B_1 = 0$ ή $\Gamma_1 = 0$

(2) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \iff \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$

β) Συμπίπτουν $\Leftrightarrow$ τέμνουν τους άξονες στο ίδιο σημείο.

Το (π_1) τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο $\left(-\frac{\Delta_1}{A_1}, 0, 0\right)$ τον Oy στο σημείο $\left(0, -\frac{\Delta_1}{B_1}, 0\right)$ και τον άξονα Oz στο σημείο $\left(0, 0, -\frac{\Delta_1}{\Gamma_1}\right)$

Το (π_2) τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο $\left(-\frac{\Delta_2}{A_2}, 0, 0\right)$ τον άξονα Oy στο σημείο $\left(0, -\frac{\Delta_2}{B_2}, 0\right)$ και τον άξονα Oz στο σημείο $\left(0, 0, -\frac{\Delta_2}{\Gamma_2}\right)$

(*) Υποθέτουμε ότι έχουμε τομή και με τους 3 άξονες $\Rightarrow A_i, B_i, \Gamma_i \neq 0$ (αν όχι τότε απλά "οδιαφορούμε" για την αντίστοιχη περίπτωση)

Άρα τα (π_1), (π_2) συμπίπτουν αν τα σημεία ταυτίζονται

$$-\frac{\Delta_1}{A_1} = -\frac{\Delta_2}{A_2}, \quad -\frac{\Delta_1}{B_1} = -\frac{\Delta_2}{B_2}, \quad -\frac{\Delta_1}{\Gamma_1} = -\frac{\Delta_2}{\Gamma_2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \\ \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \\ \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \kappa$$

$\Leftrightarrow$ Ισχύει αν τα επίπεδα συμπίπτουν

Αντίστροφα αν ισχύει η σχέση $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \kappa \Rightarrow$

$A_1 = \kappa \cdot A_2$, $B_1 = \kappa \cdot B_2$, $\Gamma_1 = \kappa \cdot \Gamma_2$, $\Delta_1 = \kappa \cdot \Delta_2 \Rightarrow (\pi_1): (\kappa A_2) \cdot x + (\kappa \cdot B_2) \cdot y + (\kappa \cdot \Gamma_2) z + (\kappa \cdot \Delta_2) =$

$\Rightarrow (\pi_1) = (\pi_2)$

γ) τεμνονται $\Leftrightarrow$ δεν, ειναι παραλληλα και δεν ταυτιζονται

$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ ή $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ ή $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$

{ (*) Η τομη δυο επιπεδων ειναι παντα ευθεια }

(*) Ειδικη περιπτωση τομης

Τα (π_1) και (π_2) τεμνονται καθετα αν τα καθετα τους διανυσματα τεμνονται καθετα

$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1) \perp (\pi_1)$

$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2) \perp (\pi_2)$

$(\pi_1) \perp (\pi_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow$

$A_1A_2 + B_1B_2 + \Gamma_1\Gamma_2 = 0 \rightarrow$ Ικανη και αναγκαια συνθηκη για να ειναι δυο επιπεδα καθετα.

Παραδειγμα

(1) $(\pi_1): 2x + y + 3 = 0$

$(\pi_2): 2x + 2y + z = 1$

$\underbrace{\frac{2}{2}}_{\text{Συντελεστες του } x\ (A_i)} \neq \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Συντελεστες του } y\ (B_i)}$

Αρα τα (π_1), (π_2) τεμνονται

(2) (π_1): $2x+2y+3z=2$

(π_2): $4x+4y+6z=4$

Τα (π_1) και (π_2) ταυτιζονται γιατι $\frac{2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{2}{4}$

(3) (π_1): $2x+2y+3z=2$

(π_2): $4x+4y+6z=3$

Τα (π_1), (π_2) παραλληλα γιατι $\frac{2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}\neq\frac{2}{3}$

(4) Εστω επιπεδο (π): $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$

Θελουμε ενα αλλο επιπεδο (π_1) παραλληλο στο (π)

Ενα τετοιο θα ειναι (π_1): $Ax+By+\Gamma z+\Delta'=0$ οπου $\Delta\neq\Delta'$

γιατι (π_1), (π) παραλληλα καθως $\frac{A}{A}=\frac{B}{B}=\frac{\Gamma}{\Gamma}\neq\frac{\Delta}{\Delta'}$

Παρατηρησεις

(1) Εχω δυο επιπεδα (π_1): $A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$ και (π_2): $A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$, τα οποια τεμνονται. Εστω ενα επιπεδο (π_3): $A_3x+B_3y+\Gamma_3z+\Delta_3=0$.

Ποτε τα τρια αυτα επιπεδα τεμνονται σε μοναδικο σημειο;

$\Leftrightarrow$ ποτε αυτο το συστημα εχει μοναδικη λυση; $\Leftrightarrow \det\neq 0$

$\downarrow$ αλλη ερωτηση που μπορουν να μου κανουν για να γινει το νοημα πιο πολυ αλγεβρα

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$ $\rightarrow$ Ικανη και αναγκαια συνθηκη

(*) Αν $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3=0$ τοτε περνανε ολα απο την αρχη των αξονων, οποτε εχω κατευθειαν την λυση το σημειο τομης, δηλ. η αρχη των αξονων

(*) Αν $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ αλλα αυτο είναι ενα κοινο σημειο των επιπεδων ; αυτο είναι μοναδικο $\Leftarrow$ $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$

(2) Εστω $(\Sigma') \begin{cases} (\pi_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ (\pi_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \\ (\pi_3): A_3x + B_3y + \Gamma_3 z + \Delta_3 = 0 \\ (\pi_4): A_4x + B_4y + \Gamma_4 z + \Delta_4 = 0 \end{cases}$ Εχουν μοναδικο κοινο σημειο $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$

Εστω

Ποτε το (π_4) διερχεται απο το κοινο σημειο τομης;
Θα διερχεται απο το κοινο σημειο τομης $\Leftrightarrow$ το (Σ') είναι συμβιβαστο $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A|B)$

$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \\ A_4 & B_4 & \Gamma_4 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3 = r(A|B)$

$A|B = \left[\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & -\Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & -\Delta_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & -\Delta_3 \\ A_4 & B_4 & \Gamma_4 & -\Delta_4 \end{array}\right]$ $\to$ Για να εχει $r(A|B) = 3$ θα πρεπει $\det(A|B) = 0$ $\to$ Ικανη και αναγκαια συνθηκη 4 επιπεδα να διερχονται απο το ιδιο σημειο

Ορισμος

Εστω (π_1), (π_2) επιπεδα που τεμνονται. Οριζεται ως γωνια των (π_1), (π_2) η μικροτερη απο τις δυο (παραπληρωματικες) διεδρες γωνιες που σχηματιζουν τα (π_1), (π_2)

$\vec{x}, \vec{y}$ διανυσματα. Ποια ειναι η γωνια τους;

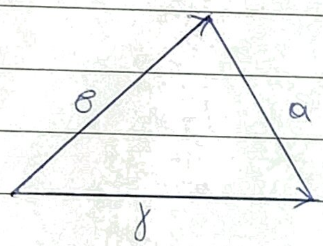
$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\vec{x} \hat{,} \vec{y}) \Rightarrow \cos(\vec{x} \hat{,} \vec{y}) = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$ (1)

Ανισοτητα Cauchy-Schwartz: $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \Rightarrow$

$-1 \leq \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \leq 1$ υπαρχει μοναδικη φ οπου $\cos\varphi =$

Γεωμετρικα

Νομος συνημιτονων: $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \gamma \cdot \cos A \rightarrow$ βρισκεται απεναντι απο την πλευρα a



$\vec{a} = \vec{\beta} - \vec{\gamma}$

αν οπου $a = |\vec{\beta} - \vec{\gamma}|$ οπου $\beta = |\vec{\beta}|$ και $\gamma = |\vec{\gamma}|$ δηλ. κανω αντικατασταση

οποτε εχω $\Rightarrow |\vec{\beta} - \vec{\gamma}| = |\vec{\beta}|^2 + |\vec{\gamma}|^2 - 2|\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}| \cdot \cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) \Rightarrow$

$|\vec{\beta} - \vec{\gamma}|^2 - |\vec{\beta}|^2 - |\vec{\gamma}|^2 = 2|\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}| \cdot \cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) \Rightarrow \dots\dots$

αρα κανω αναπτυγμα προκυπτει η (1)

Παρατηρηση

$(\pi_1): A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0$, $(\pi_2): A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0$

$(\pi_1) \perp (\pi_2) \Leftrightarrow |A_1 A_2 + B_1 B_2 + \Gamma_1 \Gamma_2| = 0$ (*)

$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1) \\ \vec{n}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2) \end{array}\right\}$ η γωνια (π_1), (π_2) οριζεται ως η γωνια των $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$

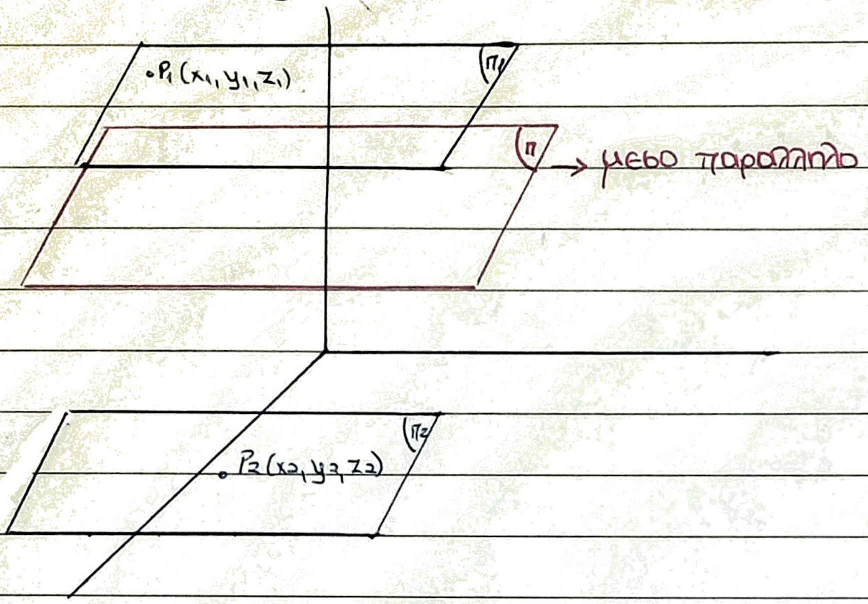
$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \dfrac{\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Rightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow \cos = 0 \Rightarrow$

$\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = 0 \Rightarrow$ η (*) ισχυει [Ειναι καθετα οταν η γωνια $\frac{\pi}{2}$]

Εφαρμογη

Εστω (π₁) $Ax+By+\Gamma z+\Delta_1=0$

(π₂) $Ax+By+\Gamma z+\Delta_2=0$ παραλληλα με $\Delta_1 \neq \Delta_2$



παραλληλο στο (π₁), (π₂) και ακριβως "στη μεση" αυτων

Εστω $P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$, προφανως ανηκει στο ζητουμενο

(π) (π στο μεσο των π₁, π₂) αρα αν (π): $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$

(γιατι (π) // (π₁), (π₂) οποτε μενει ο προσδιορισμος του Δ.

Ομως $P \in (\pi) \Rightarrow A\cdot\frac{x_1+x_2}{2} + B\cdot\frac{y_1+y_2}{2} + \Gamma\cdot\frac{z_1+z_2}{2} + \Delta = 0 \Rightarrow$

$A(x_1+x_2)+B(y_1+y_2)+\Gamma(z_1+z_2)+2\Delta=0 \Rightarrow (Ax_1+By_1+\Gamma z_1)+(Ax_2+By_2+\Gamma z_2)+2\Delta=0$

$\Rightarrow -\Delta_1-\Delta_2+2\Delta=0 \Rightarrow 2\Delta=\Delta_1+\Delta_2 \Rightarrow \Delta=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$

αφου $P_1 \in (\pi_1)$ αφου $P_2 \in (\pi_2)$

$-\Delta_1 = Ax_1+By_1+\Gamma z_1$ $-\Delta_2 = Ax_2+By_2+\Gamma z_2$

Αρα το (π): $Ax+By+\Gamma z+\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}=0$